

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE

BN 33/82

MEI

J.M. ANTHONISSE, J.K. LENSTRA

OPERATIONELE BESLISKUNDE OP HET MATHEMATISCH CENTRUM

kruislaan 413 1098 SJ amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 413 Kruislaan, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

OPERATIONELE BESLIJKUNDE OP HET MATHEMATISCH CENTRUM

J.M. ANTHONISSE

J.K. LENSTRA

SAMENVATTING

Deze notitie is gewijd aan besliskundige consultatie op het Mathematisch Centrum. Na een korte inleiding over de activiteiten van het MC, in het bijzonder van de afdeling Mathematische Besliskunde, worden drie consultatieve projecten beschreven.

TREFWOORDEN: *mathematische besliskunde, consultatie, simulatie, lineaire programmering, combinatorische optimalisering.*

OPMERKING: Dit rapport zal verschijnen in *Kwantitatieve Methoden in het Management*, geredigeerd door C.B. Tilanus, O.B. de Gans en J.K. Lenstra (Spectrum, Utrecht, 1982).

Het Mathematisch Centrum (MC), opgericht in 1946, is een stichting met als doel de bevordering van de wiskunde en haar toepassingen.

Het Instituut MC omvat zes wetenschappelijke afdelingen: zuivere wiskunde, toegepaste wiskunde, numerieke wiskunde, mathematische statistiek, mathematische besliskunde, en informatica. Van de ondersteunende diensten spelen de bibliotheek en de publicatiedienst een rol van nationale betekenis. De inkomsten van het instituut zijn voornamelijk afkomstig van de Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek (ZWO); daarnaast worden inkomsten verkregen door het uitvoeren van consultatieve werkzaamheden in opdracht van bedrijven en overheidsinstellingen. De inkomsten over 1980 bedroegen ruim dertien miljoen gulden, waarvan ongeveer 85% afkomstig was van ZWO. Het instituut had eind 1980 153 medewerkers in dienst.

Recentelijk is de Stichting MC tevens belast met het coördineren, stimuleren en evalueren van wiskundig onderzoek aan universiteiten en hogescholen, voor zover dat door ZWO wordt gefinancierd. Daarbij wordt samengewerkt met een aantal landelijke werkgemeenschappen op verscheidene deelgebieden van de wiskunde. Deze nieuwe taak is hier vermeld ter onderstreping van de centrale positie van het MC binnen de Nederlandse wiskunde, ook al is zij niet van primair belang voor het onderwerp waaraan deze notitie is gewijd: consultatie op het gebied van de mathematische besliskunde.

De afdeling Mathematische Besliskunde van het MC houdt zich bezig met onderzoek naar wiskundige modellen en methoden ter ondersteuning van optimaal handelen in beslissingssituaties. Motiverende problemen komen oorspronkelijk voort uit de economie en de bedrijfskunde, maar treden tegenwoordig ook op in de communicatie- en regeltechniek en zelfs in de sociale en politieke wetenschappen.

Dit onderzoek brengt de bestudering van een breed scala van wiskundige onderwerpen met zich mee. Op de afdeling worden bijvoorbeeld complexiteits-theorie, combinatoriek, waarschijnlijkheidsrekening en differentiaalmeetkunde

beoefend. Het bindende element ligt in de potentiële toepasbaarheid van de onderzochte modellen en methoden. De afdeling streeft er dan ook naar te worden betrokken bij projecten die leiden tot originele en geavanceerde toepassingen binnen gebieden waarop zij zich deskundig acht. Dergelijke projecten kunnen uiteenlopen van het geven van expliciete antwoorden op specifieke vragen tot het deelnemen in ontwikkelingsonderzoek, gericht op het praktisch toepasbaar maken van nieuwe theoretische resultaten.

De consultatieve activiteiten van de afdeling staan niet los van het wetenschappelijk onderzoek, maar vormen daarvan een integrerend onderdeel. De huidige onderzoeksprojecten en de belangrijkste toepassingsgebieden zijn:

- * combinatorische optimalisering: het bepalen van optimale distributiesystemen, dienstregelingen, lesroosters, productieschema's, snij- en knippatronen, vestigingsplaatsen, kamertoewijzingen en zetelverdelingen;
- * analyse en besturing van informatiestromen in netwerken, zoals computernetwerken, telecommunicatienetwerken voor telefoon-, mobilofoon- en satelliet-systemen, en netwerken van wachtrijen;
- * systeem- en regeltheorie, in het bijzonder voorspelling, filteren, niet-lineaire besturing, systeemidentificatie en analyse van tijdreeksen.

De ervaring heeft geleerd dat dergelijke consultatieve werkzaamheden dikwijls leiden tot grensverleggende toepassingen, en ook tot belangwekkende wiskundige problemen en resultaten. Dit wordt hieronder geïllustreerd aan een drietal vraagstellingen uit de praktijk. Aan de beschreven projecten werd meegewerkt door A.W.J. Kolen, B.J. Lageweg, L. Stougie, O.J. Vrieze en de auteurs.

1. Spelen om te delen

Een baggerbedrijf had, in een consortium met drie andere internationaal werkende aannemers, aan groot contract uitgevoerd. Daarvan was een voorraad materieel overgebleven ter waarde van 24,8 miljoen dollar en bestaande uit 268 artikelen, variërend van reserveonderdelen tot rotsbrekers en drijvende hijskranen.

Het materieel kon ter plaatse niet worden verkocht en de partners waren overeengekomen ieder een vierde deel te kopen. De prijzen per artikel waren door onafhankelijke deskundigen vastgesteld. Men had verder afgesproken de uitverkoop in 25 ronden te laten plaatsvinden. In elk van de eerste 24 ronden

zou iedere deelnemer 0,25 miljoen dollar te besteden krijgen. Men mocht sparen voor volgende ronden, maar in totaal niet meer dan de prijs van het duurste nog onverkochte stuk. In de laatste ronde moest het gespaarde bedrag worden besteed.

De volgorde waarin de partners in de eerste ronde aan bod kwamen zou door loting worden bepaald: $V_1 = (1,2,3,4)$. De overige volgordes volgden hieruit: in de tweede ronde $V_2 = (2,3,4,1)$, in de derde $V_3 = (3,4,1,2)$ en in de vierde $V_4 = (4,1,2,3)$. Dan volgde een tweede cyclus van vier ronden: V_2, V_3, V_4, V_1 . De derde cyclus begon met V_3 , enzovoort.

Het bedrijf had een lijst opgesteld waarop per artikel naast de prijs ook de eigen waardering en de vermoedelijke belangstelling van de partners stonden. De eigen waardering liep van A (aantrekkelijk) t.e.m. E (schroot). Zo bevatte klasse A drie dure hijskranen, waarvoor vijf of zes ronden gespaard zou moeten worden; wegens de lange levertijd van nieuwe kranen werd verwacht dat elke deelnemer zou proberen één of meer van de kranen te kopen. Om tijdens het spel de stand van zaken goed te kunnen volgen werd een boekhoudprogramma geschreven, dat alle aankopen en besparingen bijhield en bijvoorbeeld op verzoek een lijst produceerde van aantrekkelijke stukken die in deze of de volgende ronde binnen bereik zouden komen. Dit programma werd gedraaid op de bedrijfscomputer en stond de delegatie die het spel speelde ter beschikking via een telefoonlijn en een terminal.

De opdracht aan het MC was een strategie te ontwerpen waarmee zoveel mogelijk waardevol materieel binnengesleept zou worden. Een analyse van de voorraad en de spelregels leverde nuttige informatie op. Aankopen van artikelen uit klasse E zouden onvermijdelijk zijn; de minimalisering daarvan werd als primaire doelstelling gekozen. De loting was bedoeld om iedereen een gelijkwaardige positie te geven maar doet dat niet; bijvoorbeeld: degene die 2 loot komt in veel ronden ná 1 aan de beurt, wat nadelig is als 1 belangstelling heeft voor dezelfde artikelen als 2. Een ander probleem was het eindspel. Het is mogelijk dat er slechts dure artikelen overblijven terwijl geen enkele deelnemer genoeg geld heeft om te kopen. Ook als het spel niet vastloopt blijft er voor tenminste 0,8 miljoen dollar aan materieel over, zonder regels voor verdere afwikkeling.

Voor het spel waren diverse strategieën denkbaar. Met behulp van een simulatieprogramma, uiteraard speciaal voor deze toepassing geschreven, werden vijf strategieën op hun merites onderzocht, elk met en zonder jacht

op hijskranen. Voor meer dan 50 combinaties van strategieën voor de deelnemers en waarderingen voor de artikelen hebben wij het spel gesimuleerd en de resultaten geanalyseerd.

Volgens de simulaties zou de uitkomst van de loting een aanzienlijke invloed hebben. Verder moest men in het begin het budget zoveel mogelijk opmaken en pas in een van de laatste ronden een hijskraan trachten te kopen. De ronde waarin het sparen daarvoor moest beginnen hing af van de loting; tijdens het sparen mocht men niet meer uitgeven dan de concurrent met de dichtst bij liggende besparingen. Men diende scherp te letten op artikelen van 0,25 miljoen dollar of minder, waarvoor niet gespaard hoefde te worden. Tenslotte bleek dat het spel waarschijnlijk zou vastlopen: de partners zouden het eindspel dus alsnog moeten regelen.

Met behulp van het boekhoudprogramma en de uitgezette strategie is het bedrijf er in geslaagd slechts 10% van het budget aan klasse E te besteden en bovendien verreweg het meeste uit de klassen A en B te kopen. Dit ondanks een ongunstige uitkomst van de loting en een onvoordelige toewijzing van de rest van het materieel na de laatste ronde.

De schattingen van het behaalde voordeel lopen uiteen van 0,25 tot 1,50 miljoen dollar. Een objectieve evaluatie is onmogelijk omdat de werkelijke voorkeuren van de andere deelnemers onbekend zijn. Eén van hen kocht andere artikelen dan was verondersteld. In het algemeen probeerden de anderen per ronde gunstig uit te komen, terwijl onze opdrachtgever naar een optimaal totaal resultaat streefde.

Deze consultatie is niet alleen opmerkelijk door de probleemstelling en het resultaat maar ook aangezien ons slechts anderhalve week ter beschikking stond. Niettemin kon het spel intensief en effectief worden voorbereid.

2. Na de laatste rit

Een gemeentelijk vervoerbedrijf dat 16 tramlijnen en 270 trams exploiteert was geïnteresseerd in een optimale toewijzing van trams aan remises. Op elke lijn rijdt een aantal trams tussen de beide eindpunten heen en weer. Na afloop van de laatste rit van een dag rijdt elke tram naar één van de zeven remises. Elke remise heeft een beperkte capaciteit. Aan een remiserit zijn kosten verbonden die onder meer afhangen van de ritlengte. Het probleem is de trams zodanig aan de remises toe te wijzen dat de totale kosten van de

remiseritten minimaal zijn.

Het bedrijf stelde belang in drie varianten van dit probleem. De eerste variant komt overeen met de bestaande praktijk: de trams van dezelfde lijn moeten alle naar dezelfde remise. Dit is bevorderlijk voor het contact met en tussen het personeel dat op één lijn werkt. De tweede variant kan besparingen opleveren: de trams van een lijn die hun laatste rit naar hetzelfde eindpunt maken moeten naar dezelfde remise. Men wilde de lagere kosten afwegen tegen het nadeel van een spreiding van personeel. De derde variant is de voordeligste: elke tram mag naar elke remise. Men overwoog niet dit werkelijk toe te laten, maar wilde toch weten wat de minimale kosten zouden zijn.

Van de zeven opgegeven remises bestaan er slechts drie in werkelijkheid. Twee van de vier fictieve remises zijn locaties waar een remise zou kunnen worden aangelegd. Alvorens daartoe te besluiten wilde men inzicht hebben in de mogelijke besparingen, afhankelijk van de te kiezen capaciteiten. De overige twee fictieve remises zijn in feite twee nieuwe routes naar een bestaande remise. Aanleg daarvan zou de nachtelijke geluidshinder kunnen verminderen, wederom afhankelijk van de te kiezen capaciteiten - d.w.z. de aantallen trams die de routes mogen gebruiken. Men wilde meer weten over de relatie tussen exploitatiekosten en gebruik van één of beide nieuwe routes. Dit alles leidde tot 40 combinaties van capaciteiten van de remises voor elke variant. In totaal moesten dus 120 problemen worden opgelost.

De wiskundige formulering van deze problemen lag voor de hand. De derde variant is niets anders dan een lineair transportprobleem, waarvoor standaardtechnieken altijd een geheeltallige oplossing opleveren: we hoeven dus niet bang te zijn dat een tram over verscheidene remises wordt verdeeld. De eerste en tweede variant kennen extra bijvoorwaarden die aangeven dat alle trams van dezelfde lijn (of hetzelfde eindpunt) naar dezelfde remise moeten; hiertoe werd voor elk van de $16 \times 7 = 112$ lijn-remise combinaties (resp. voor elk van de $32 \times 7 = 224$ eindpunt-remise combinaties) een nul-één variabele ingevoerd.

De oplossing van de resulterende geheeltallige lineaire programmeringsproblemen geschiedde door het APEX systeem van Control Data, dat beschikbaar is op de Cyber 175-750 van SARA (Stichting Academisch Rekencentrum Amsterdam). Dit standaardprogramma berekende tegen redelijke kosten goede tot zeer goede oplossingen.

De verwerking door de computer vroeg enige zorg. Onze algemene LP-

matrixgenerator leverde voor elke variant een invoerbestand voor één combinatie van capaciteiten. Een speciaal geschreven procedure verzorgde daarna, voor elk van de gevallen, de substitutie van een combinatie van capaciteiten in het invoerbestand, de aanroep van het APEX systeem, en de toevoeging van de oplossing aan een uitvoerbestand. Een rapportgenerator maakte tenslotte handzame overzichten van alle oplossingen.

De problemen zijn later nog opgelost voor situaties waarin sprake is van meer trams op sommige lijnen of van een gewijzigd lijnennet. Daardoor kan het huidige bedrijf worden vergeleken met mogelijke toekomstige situaties.

Zoals al is gesteld lag het niet in de bedoeling de beste oplossing zonder meer te implementeren. Vele van de doorgerekende varianten en situaties zijn onrealistisch, maar dat draagt juist bij tot de waarde van de resultaten als hulpmiddel in de beleidsbepaling. Het gemeentelijk vervoerbedrijf onderzoekt thans of het mogelijk is over te gaan op een toewijzingsregel volgens de tweede variant; dat zou een forse besparing opleveren.

3. Lastige klanten

Een Nederlands bedrijf dat zich vooral op de detailhandel toelegt had, in het kader van het streven naar diversificatie, een groot aantal vakantie-bungalows aangeschaft. Een klant kan bij elk van de vestigingen een reservering maken en krijgt dan direct te horen of er in de door hem gewenste periode nog een bungalow beschikbaar is. Pas in een later stadium wordt voor iedere geaccepteerde klant bepaald in welke bungalow hij zijn vakantie zal doorbrengen. Deze procedure riep enige vragen op.

Is er een eenvoudige regel die aangeeft of een klant kan worden geaccepteerd? Ja, zo'n regel bestaat: een toewijzing van bungalows aan klanten in de door hen opgegeven perioden is dan en slechts dan mogelijk als, op ieder tijdstip, het aantal klanten niet groter is dan het aantal bungalows. Is er ook een methode die de geaccepteerde klanten in een zo klein mogelijk aantal bungalows onderbrengt? Zo'n methode bestaat inderdaad: wijs de klanten in volgorde van begintijdstip toe aan bungalows, met voorkeur voor reeds eerder gebruikte bungalows.

Ingewikkelder versies van deze problemen werden reeds in 1954 opgelost door G.B. Dantzig en D.R. Fulkerson, coryfeeën uit de besliskunde, getuige het bestaan van de Dantzig Prize en de Fulkerson Prize. De gestelde vragen

sloten nauw aan bij ons onderzoek naar machinevolgordeproblemen, zodat de antwoorden al tijdens een eerste oriënterend gesprek konden worden gegeven.

Aan het eind van dit gesprek schoot onze potentiële opdrachtgever nog een triviale complicatie te binnen: een klant kan bij aanmelding een specifieke bungalow reserveren, tegen betaling van f 25,-, en wordt dan onmiddellijk toegewezen. Dit gegeven heeft een dramatisch effect op de complexiteit van de probleemstelling. Was er voorheen sprake van identieke bungalows en niet-identieke klanten, nu zijn ook de bungalows niet meer gelijk. De vraag of een klant die geen voorkeur uitspreekt kan worden geaccepteerd, komt nu neer op het volgende probleem: kunnen n gegeven tijdsintervallen (de nog toe te wijzen klanten) worden "ingepakt" in m andere gegeven tijdsintervallen (de vrije perioden van de bungalows)?

Dit is een fraai combinatorisch probleem, waarover de literatuur helaas in alle talen zwijgt. De hierboven vermelde noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor acceptatie is nu slechts geldig indien een klant bereid is tijdens zijn vakantie zo nu en dan naar een andere bungalow te verhuizen, wat niet het geval is. Onlangs is gebleken dat het probleem in polynomiale tijd oplosbaar is voor iedere vaste m en NP-volledig voor willekeurige m . Deze classificatie stemt de complexiteitstheoreticus tot grote tevredenheid. De polynomiale methode is echter niet werkelijk efficiënt voor realistische waarden van m , en NP-volledigheid impliceert geen volstrekte onoplosbaarheid. Het lijkt zeer wel mogelijk een algoritme te ontwikkelen die in de meeste gevallen snel het gezochte antwoord geeft - al is er wellicht altijd een kunstmatig geval te construeren waaraan de algoritme tot ná de vakantie doorrekent.

Van onze gesprekspartner hebben wij niets meer vernomen: de complicaties die de lastige klanten veroorzaken zijn waarschijnlijk inderdaad triviaal en verstoren de toepassing van de bestaande methoden niet in ernstige mate.

Is dit nu een *mislukte* consultatie? Nee, er is hier veeleer sprake van het *omgekeerde* van een consultatie. Iemand uit de praktijk leverde een probleem waar hij zelf bij nader inzien niet zo mee zat - maar wij bleven er mee zitten. Verder onderzoek naar dit probleem behoort tot de taak van het Mathematisch Centrum. Het wordt in eerste instantie gemotiveerd door onze professionele weetgierigheid, maar ook door mogelijke praktische behoeften in de toekomst.